

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

**ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>:****A.**

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , να δείξετε ότι:  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 8

**B.**

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε να δείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$**  του πεδίου ορισμού της, αν

$$\text{υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

γ. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

Μονάδες 2

δ. “Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

$$\text{Δηλαδή: } (M_1 M_2) = |z_1 - z_2|$$

Μονάδες 2

ε. Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ , τότε  $f(x) \geq 0$ .

Μονάδες 2

## ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$

- i) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 10
- ii) Βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . Μονάδες 7
- iii) Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 1$  Μονάδες 8

## ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

Να βρείτε:

A. Το μέτρο του μιγαδικού  $\kappa$  του οποίου η εικόνα  $\Sigma(\kappa)$  ισαπέχει από την εικόνα  $M(z)$  κάθε μιγαδικού  $z$  που επαληθεύει τις σχέσεις  $|z-1|=|z-2|$  και  $|z-i|=|z-2i|$  και την αρχή  $O(0,0)$  των αξόνων.

Μονάδες 13

B. Την ελάχιστη τιμή του  $|\kappa|$  καθώς και το μιγαδικό  $\kappa$ .

Μονάδες 12

## ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

A. Δίνεται η  $F$  με  $F(x) = \int_0^x \left( \int_0^{t^2+1} \frac{e^u}{e^2+1} du \right) dt$  και  $x \in \mathbb{R}$

Να μελετήσετε την  $F$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και

$$\int_1^x tf(t)dt + 2 = f(x)(x^2 + 1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Μονάδες 3

- ii) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$  Μονάδες 6

- iii) Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)\eta\mu x)$  Μονάδες